نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **مشتق**

@sabertarkibi

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

$$y = (gof)(x)$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) \times g'(f(x)) \xrightarrow{x=۱} y'(۱) = f'(۱) \times g'(f(۱))$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+۱}\right)^۳ \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{(x+۱)^۲} \times ۳\left(\frac{x}{x+۱}\right)^۲$$

$$\xrightarrow{x=۱} f'(۱) = \frac{۱}{۴} \times ۳\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۱۶}$$

از طرفی $f(۱) = \frac{۱}{۸}$ است، پس $g'(f(۱)) = g'\left(\frac{۱}{۸}\right)$ را نیز می‌خواهیم. با توجه به شکل $g'\left(\frac{۱}{۸}\right) = ۴$ است. چون شاخه ی سمت چپ تابع g، حالت خطی داشته و مشتق آن برابر با شیب خط است.

$$f'(۱) \times g'(f(۱)) = \frac{۳}{۱۶} \times ۴ = \frac{۳}{۴}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در اطراف $x = ۵$ مقدار $[\sin x]$ برابر $[\sin ۵]$ یعنی ۱- است. دقت کنید که ۵ رادیان در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.

$$y = gof(x) = g(x[\sin x]) = \frac{x[\sin x]}{۴-x[\sin x]}$$

$$\xrightarrow{[\sin x]=-۱} y = \frac{-x}{۴+x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-۴}{(۴+x)^۲} \Rightarrow y'(۵) = \frac{-۴}{(۴+۵)^۲} = \frac{-۴}{۸۱}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

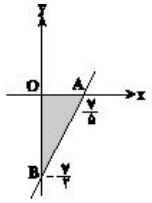
$$y = \frac{۲x-۳}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x=۱} y = -۱$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲x-۳)}{x}$$

$$\Rightarrow m = y'(۱) = \frac{۲-(-\frac{۱}{۲})}{۱} = \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط مماس} : y + ۱ = \frac{۵}{۲}(x - ۱) \Rightarrow y = \frac{۵}{۲}x - \frac{۷}{۲}$$

با توجه به شکل داریم:



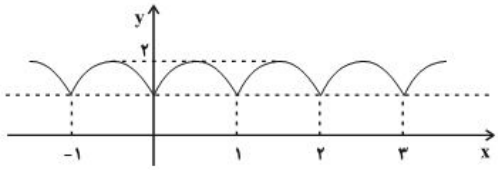
$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{۱}{۲} OA.OB = \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۵} \times \frac{۷}{۲} = \frac{۴۹}{۲۰} = ۲/۴۵$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه«۳»

نمودار تابع به صورت شکل زیر است:



همانطور که دیده می‌شود تابع در نقاط به طول صحیح گوشه‌ای است. اولین نقطه گوشه‌ای با طول مثبت $x = ۱$ است. پس نقطه مورد نظر $A(۱,۱)$ است. شیب نیم مماس چپ همان $f'_-(۱)$ است.

$$f'_-(۱) = (۱ + \sin \pi x)'|_{x=۱} = \pi \cos \pi x|_{x=۱} = -\pi$$

$$\Rightarrow \text{معادله نیم مماس چپ} : y - ۱ = -\pi(x - ۱)$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}} y = \pi + ۱$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^{3}(x-1)(x+1)} = \sqrt{(x-1)^{4}(x+1)}$$

$$= (x-1)^{2}\sqrt{x+1}$$

$x = 1$، ریشه مضاعف تابع f است؛ به این معنی که نمودار f در $x = 1$ بر محور xها مماس است. پس برای اینکه $f''(1)$ را حساب کنیم، کافی است ۲ بار از عامل صفرکننده $(x-1)^{2}$ مشتق بگیریم و $x = 1$ را در $\sqrt{x+1}$ جای‌گذاری کنیم. داریم:

$$f''(1) = 2\sqrt{x+1}\,|_{x=1} = 2\sqrt{2}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{4}{27}$$

$$y = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \Rightarrow y' = \frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}}{\sqrt[3]{x^{3}}} \times f'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$y'\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{-3}{\frac{1}{9}} \times f'(3) = -27 \times \frac{4}{27} = -4$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»

در تابع $f(x) = ax + [ax]$، قسمت $[ax]$ می‌تواند باعث به‌وجود آمدن نقطه مشتق‌ناپذیر از طریق ناپیوستگی شود. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که $ax \in Z$ باشد.

در حالت کلی برای $[x]$ در$(0,4)$ به‌ازای ۳ عدد صحیح ۱، ۲ و ۳ این اتفاق رخ می‌دهد و در$[ax]$ (که با توجه به گزینه‌ها $a \in Z$) به‌ازای اعداد به فرم$\frac{1}{a}$ ، $\frac{2}{a}$ و . . . (یعنی $\frac{k}{a}$ که $k \in Z$) این اتفاق رخ می‌دهد. اگر $a = -2$ باشد، به‌ازای ۷ عدد صحیح این اتفاق می‌افتد:

$$x = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱

برای آنکه خط مماس بر منحنی $gof(x)$ موازی محور طول‌ها باشد، باید شیب آن برابر صفر باشد. بنابراین معادله $(gof)'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$(gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = ۰$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \\ g'(x) = x^۲ - x - ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times (f^۲ - f - ۶) = ۰ \xrightarrow{f=\sqrt{x}} \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x - \sqrt{x} - ۶) = ۰$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x} - ۶ = ۰ \Rightarrow x - ۶ = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان۲}} x^۲ - ۱۲x + ۳۶ = x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱۳x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۹)(x - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۹ \\ x = ۴ \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

$x = ۴$ در معادله صدق نمی‌کند.

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

با ساده‌سازی حد داده شده داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{-h} = -۳ \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{۳h}$$

$$= -۳f'(۲) = ۲ \rightarrow f'(۲) = -\frac{۲}{۳}$$

حال مقدار مشتق تابع $f(x^۲ + x)$ را در $x = ۱$ بدست می‌آوریم:

$$(f(x^۲ + x))' = (۲x + ۱)f'(x^۲ + x) \xrightarrow{x=۱} ۳f'(۲) = ۳(-\frac{۲}{۳}) = -۲$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم شرط لازم برای مشتق‌پذیر بودن در یک نقطه، پیوستگی تابع در آن نقطه است. پس:

$$f(۱) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) \Rightarrow a + ۲ = ۱ - b \Rightarrow a + b = -۱ \quad (*)$$

حال تابع مشتق f را می‌یابیم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{۲\sqrt{x}} & , x > ۱ \\ ۳x^۲ - b & , x < ۱ \end{cases}$$

در نهایت بنابر مشتق‌پذیر بودن تابع در x = ۱، خواهیم داشت:

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۳ - b \Rightarrow a = ۶ - ۲b \Rightarrow a + ۲b = ۶ \quad (**)$$

با توجه به روابط (*) و (**) می‌توان نتیجه گرفت:

$$a = -۸ \ , \ b = ۷ \Rightarrow a - b = -۱۵$$